Devoir maison n° 10

À rendre le vendredi 29 mars ou le mercredi 3 avril

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté et à la précision de la rédaction ainsi qu'au respect de la fiche de consignes.

Exercice 1 (d'après ATS 2021)**.**
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

Q1. Montrer que f est périodique de période π.

Q2. Étudier la parité de f.

Q3. Justifier que pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \cos x - \sin x$.

Q4. Calculer une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x - \sin x = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Pour la suite, on utilisera l'égalité :

$$\forall x \in \Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big],\ f(x) = C\cos\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big).$$

Q5. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

Q6. Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$

Q7. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

Q8. Montrer que $a_0 = 0$.

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

Q10. Montrer que, pour tout entier naturel p, on a

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{8}{\pi\left[4(2p+1)^2 - 1\right]}.$$

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.

Q11. Grâce à la question **Q7** et les calculs précédents, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(2p+1)^2 - 1}$.

Q12. Énoncer le théorème de Parseval.

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left[4(2p+1)^2 - 1\right]^2}$.